FIZIKA

Heuristika u elementarnoj fizici

Petar Svirčević[1]

Sažetak. *Poznato je, da heuristika (grč., nauka o metodama istraživanja novih spoznaja) ili ars inveniendi (lat., umijeće naslućivanja), ima ključnu ulogu u nalaženju i istraživanju novih zakona u fizici. No, ta se metoda primjenjuje u matematici i u drugim naukama. U ovome članku ćemo pomoću pretpostavljenih laboratorijskih pokusa heurističkom metodom doći do hipoteza: otpor ravnog vodiča, Coulombov zakon i duljina prijeđenog puta kod slobodnog pada. Nadalje, ako zanemarimo otpor zraka i nehomogenost gravitacijskog polja, tada ćemo ovu zadnju hipotezu dokazati na matematičkom modelu pomoću diferencijalnog i integralnog računa, budući se to gradivo obrađuje u četvrtom razredu srednje škole. Jasno da je matematički model opravdan, ako se njegovi rezultati načelno slažu s mjerenjima i opažanjima.*

Nakon heuristički izvedenih hipoteza navest ćemo: Newtonove aksiome, opći zakon gravitacije i Keplerove zakone. Prema tome imat ćemo iskazane aksiome klasične mehanike i nebeske mehanike (mehanike gibanja planeta). Opće je poznato, ako se neka disciplina izgrađuje aksiomatski, da za skup tih aksioma moraju biti zadovoljeni principi potpunosti, nezavisnosti i nekontradiktornosti.

Zadatak 1. Hipoteza o *otporu ravnog vodiča* pri "sobnoj" temperaturi glasi

$$R = \rho \frac{l}{S}, \tag{1}$$

gdje je: R otpor i $[R]_U = \Omega$, l duljina i $[l]_U = \mathrm{m}$, S površina presjeka te žice i $[S]_U = \mathrm{mm}^2$, dok je ρ specifični otpor toga vodiča i $[\rho]_U = \Omega\mathrm{mm}^2\mathrm{m}^{-1}$.

Rješenje Z1. Ako za neku žicu određene duljine izmjerimo otpor, a onda za žicu od istog materijala i presjeka dvostruke duljine opet mjerimo otpor, tada ćemo dobiti da je otpor dvostruko veći, nadalje za trostruko dulju žicu od istog materijala i presjeka dobili bi tri puta veći otpor... itd. Dakle, laboratorijskim mjerenjem zaključujemo, da je otpor R proporcionalan duljini žice, ako su presjek i vrsta materijala isti, dakle

$$R \propto l, \tag{2}$$

gdje je $\propto$ znak za proporcionalnost.

Nadalje postupamo ovako: uzmemo žice istog materijala i duljine, pa variramo S i dobijemo laboratorijskim mjerenjem da je R obrnuto proporcionalan sa S, dakle

$$R \propto \frac{1}{S}. \tag{3}$$

Jasno je da variranje presjeka možemo postići, tako da uzmemo jednu žicu od nekog vodljivog materijala određene duljine, pa onda uzmemo dvije takve identične žice, pa tri... itd.

[1] Autor je profesor matematike u mirovini u Tehničkoj školi u Zagrebu,
e-pošta: `petar.svircevic@zg.t-com.hr`

Iz (2) i (3) zaključujemo

$$R = \rho \frac{l}{S}, \tag{4}$$

gdje je ρ konstanta proporcionalnosti, koja se zove specifični otpor vodiča. Pokazuje se da konstanta ρ zavisi samo o materijalu i utvrđuje se mjerenjem.

Zadatak 2. Hipoteza o iznosu sile privlačenja, ili odbijanja, električnih naboja između kojih je vakuum dana je *Coulombovim zakonom*, koji je dan vezom

$$F = k_e \frac{Q_1 Q_2}{r^2}, \tag{5}$$

gdje je: F iznos sile i $[F]_U = \mathrm{N}$ (newton); Q_1, Q_2 su količine naboja i $[Q_1]_U = [Q_2]_U = \mathrm{C}$ ($\mathrm{C} = \mathrm{As}$ je kulon ili ampersekunda); r udaljenost središta naboja i $[r^2]_U = \mathrm{m}^2$; k_e konstanta priporcionalnosti i $[k_e]_U = \mathrm{Nm^2C^{-2}}$.

Rješenje Z2. Napomenimo, da je Coulomb koristio tzv. torziono njihalo za provjeru (5), a kasnije je u primjenu uvedena torziona vaga, koja može detektirati jako male iznose sila. No, mi u provjeri navedenog zakona govorimo o količini naboja koji se "nalazi u točki", jer nam je primarno bilo objasniti heurističku metodu, premda realizacija sljedećih zamišljenih pokusa nije tako jednostavna.

Opet radimo u laboratoriju, i to tako da količine naboja Q_1 i Q_2 variramo na istoj udaljenosti. Npr. izmjerimo F za neke količine naboja, tada Q_1 povećamo dva puta a Q_2 ne mijenjamo, i mjerenjem dobijemo da je iznos sile F dva puta veći, ili ako Q_1 ne mijenjamo, a Q_2 povećamo npr. tri puta dobijemo da je F tri puta veći, te na kraju Q_1 povećamo dva puta i istovremeno Q_2 tri puta, tada dobijemo da se F poveća šest puta. Možemo pokuse i dalje izvoditi na tome principu, pa zaključujemo da je

$$F \propto Q_1 Q_2. \tag{6}$$

Nadalje ćemo uzeti fiksne vrijednosti Q_1 i Q_2, a udaljenost r ćemo povećati npr. pet puta, tada ćemo mjerenjem dobiti da je F manji dvadesetpet puta, a ako udaljenost smanjimo tri puta, tada se iznos sile poveća devet puta. . . itd., dakle

$$F \propto \frac{1}{r^2}. \tag{7}$$

Na osnovu (6) i (7) zaključujemo, da je (5) točno, što je i trebalo pokazati. Konstanta proporcionalnosti k_e se određuje mjerenjem. Kasnije je ona dovedena u vezu s drugim fizikalnim veličinama na ovaj način

$$k_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{\mu_0 c_0^2}{4\pi} = 8.987\,551\,787 \cdot 10^9\ \mathrm{Nm^2C^{-2}}, \tag{8}$$

gdje je ε_0 dielektričnost vakuuma, μ_0 permeabilnost vakuuma, a c_0 brzina svjetla u vakuumu.

Zadatak 3. Dokazati hipotezu, da je iznos prijeđenog puta kod slobodnog pada (pretpostavimo da se pokus odvija u vakumu) dan relacijom

$$s = \frac{g}{2} t^2, \tag{9}$$

gdje je s duljina prijeđenog puta, t vrijeme slobodnog pada i $g \approx 9.81\ \mathrm{ms^{-2}}$ je iznos akceleracije sile teže.

Rješenje Z3. Najprije ćemo pomoću posebnih slučajeva doći do hipoteze o slobodnom padu, a onda ćemo istu "strogo" matematički dokazati.

Zamislimo kosinu s utorom, kojom se kotrlja elastična kuglica zanemarivog trenja podloge i otpora zraka i neka je α iznos kuta kosine prema horizontali. Sada činimo pokuse tako da na kosini mjerimo iznose prijeđenog puta i pripadnog im vremena, i dobivamo odnose

$$s_1 : t_1^2 = s_2 : t_2^2 = s_3 : t_3^2 = \ldots = a : 2, \tag{10}$$

gdje je $a = f(\alpha) = \text{const}$, dakle a je konstanta koja zavisi o α, i ona se zove iznos akceleracije jednoliko ubrzanog gibanja.

Ako povećavamo kut nagiba kosine sve do okomitosti, dakle da bude $\alpha = 90^\circ$, tada se gibanje po kosini pretvara u slobodni pad, i mjerenjem ćemo dobiti

$$s_1 : t_1^2 = s_2 : t_2^2 = s_3 : t_3^2 = \ldots = g : 2, \tag{11}$$

gdje je g iznos akceleracije sile teže kako smo već rekli. Budući se tijelo niz kosinu kotrlja, a ne klizi, tada bi se ono i na okomitoj plohi kotrljalo i "trošilo" dio energije za rotaciju. No, za precizno mjerenje bi trebalo kuglicu pustiti, da slobodno pada bez rotacije, i onda bi mjerenjem dobili $g \approx 9.81\ \text{ms}^{-2}$. Za precizno mjerenje dobili bismo da g ovisi o geografskoj širini. Na osnovu iznesenog zaključujemo da vrijedi hipoteza o slobodnom padu u obliku (9).

Sada ćemo (9) "strogo" matematički dokazati. U četvrtom razredu srednje škole se iznos brzine interpretira kao promjena iznosa puta po vremenu, dakle

$$v = s_t' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}, \tag{12}$$

a iznos akceleracije je promjena iznosa brzine po vremenu, dakle

$$a = v_t' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = s_t'' = \frac{d^2 s}{dt^2}. \tag{13}$$

Kada se radi o slobodnom padu, onda je $a = g$, pa nakon integriranja iz (13) slijedi

$$v = gt + v_0, \tag{14}$$

a ako uvažimo (12) tada iz (14) nakon integriranja dobivamo relaciju

$$s = \frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + s_0. \tag{15}$$

Uzmimo sada, da se radi o slobodnom padu, tada su početni uvjeti $v_0 = 0$ i $s_0 = 0$, pa se opet dobiva (9). Jasno da se i u ovom slučaju g određuje mjerenjem.

Napomena 1. Mogli bi postaviti pitanje zašto smo u (10), odnosno u (11), stavili odnos $a : 2$, odnosno $g : 2$? Odgovor slijedi iz (15), jer ako tu relaciju deriviramo po t dobivamo (14).

Napomena 2. Znamo da se *klasična mehanika* ili *Newtonova mehanika* može aksiomatski izgraditi na osnovu tri aksioma:

1. *Svako tijelo ostaje u stanju mirovanja ili jednolikog gibanja po pravcu, dok ga neka vanjska sila ne prisili da to stanje promijeni.*

2. *Promjena gibanja proporcionalna je sili, koja djeluje, i odvija se u smjeru djelovanja te sile.*

3. *Akcija i reakcija su po iznosu jednake, ali protivnog smjera..*

Za aksiomatsku izgradnju *nebeske mehanike* treba dodati navedenim aksiomima još jedan, tzv. *opći zakon gravitacije*, čiji je iznos sile međusobnog privlačenja dvaju tijela dan relacijom

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{16}$$

gdje su m_1 i m_2 mase planeta ili Sunca, a r je međusobna udaljenost njihovih središta, dok je G *univerzalna gravitacijska konstanta*, koja se ustanovljena mjerenjem i iznosi

$$G \approx 6.674 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2kg^{-2}} = 6.674 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}. \tag{17}$$

Napomenimo, da ovu konstantu nije moguće izračunati iz samih astronomskih mjerenja, već je potrebno izvršiti eksperiment, a prvo precizno mjerenje izveo je Cevendish 1798. g., premda je mjerni instrument za tu namjenu još ranije zamišljen. Svakako, da danas postoje metode kojima se postižu još preciznije vrijednosti te konstante.

Znamo, da je zadaća nebeske mehanike matematički proračun: staze nebeskih tijela, njihove dimenzije, brzine. . . ; no to je složen postupak. Svakako, da se ta matematička obrada bazira na nužnim fizikalnim mjerenjima.

Kepler je analizirajući mjerenja, koja su napravili njegovi prethodnici, u vezi planeta *Sunčevog sustava* uočio neke pravilnosti, i heuristički formulirao tri zakona (*Keplerovi zakoni*):

1. *Staze kojima se gibaju planeti jesu elipse u čijem se jednom fokusu nalazi Sunce.*

2. *Radijus-vektori pojedinih planeta iz jednog fokusa, u kojem se nalazi planet, prebrišu u jednakim vremenima jednake površine (plošna brzina je konstantna).*

3. *Kvadrati vremena ophoda planeta odnose se kao kubovi duljina velikih osi njihovih staza..*

Ako se uzmu bilo koja dva od tih zakona, tada se može izvesti (16), a time se upotpunjava aksiomatika nebeske mehanike.

Zaključak. Na kraju možemo zaključiti, da se u fizici većina zakona heuristički izvodi na osnovu laboratorijskih ili astronomskih pokusa i mjerenja. Čisto egzaktni izvodi ne postoje, osim gdje su uvedeni aksiomatika i idealizirani uvjeti. Treba još napomenuti, da npr. ni (1) ne mora biti točno, ako se pokusi izvode izvan nekog "standardnog" temperaturnog intervala itd. . .

Literatura

[1] Robert S. Elliott, *Electromagnetics: History, Theory, and Applications*, 1999.

[2] Boris Pavković, *Metoda posebnih slučajeva*, HMD, Zbornik radova, Šesti susret nastavnika matematike; Zagreb, 3. – 5. srpnja 2002.

[3] Viktor Pinter, *Osnove elektrotehnike I, II*, Tehnička knjiga, Zagreb 1987.

[4] Murray R. Spiegel, *Theoretical Mechanics*, Schaum's outline series, McGraw-Hill book company, New York, St. Louis, San Francisco, Toronto, Sydney.